تعداد الأعداد

هل توجد أعداد جذرية أكثر من الأعداد اللاجذرية أم العكس؟ بالطبع توجد مالا نهاية من كل منها، لذا لا معنى من طرح هذا السؤال، لكنه اتضح أن مجموعة الأعداد الجذرية لانهائية بشكل مختلف عن الأعداد اللاجذرية.

تكون مجموعة أعداد لانهائية "قابلة للعد" إذا كنا نستطيع فرز عناصرها واحدا واحدا، كمجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

الأعداد الجذرية $\mathbb{Q}$ هي أعداد تكتب على شكل كسر عددين صحيحين، إذا فهي قابلة للعد بحيث نستطيع تعداد عناصر المجموعة واحدا واحدا: $\{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{2}{3}; \frac{2}{4}; \dots\}$ وهذا ما نسميه التعداد أو العد اللانهائي، لكن هذا ليس صحيحا بالنسبة للأعداد اللاجذرية (والتي لا يمكن كتابتها على شكل كسر) فهي تمثل مجموعة غير قابلة للعد اللانهائي.

الصورة

سنة 1873 جاء الرياضي الكبير دجوردج كانتور بمبرهنة جميلة وراقية لهذه النتائج، ففي البداية يشرح أنه عندما نضع الأعداد الجذرية واللاجذرية معا، فإننا نحصل على مجموعة الأعداد الحقيقية، فإذا افترضنا أن مجموعة الأعداد اللاجذرية قابلة للعد تماما كالأعداد الجذرية فإن مجموعة الأعداد الحقيقية ستكون كذلك قابلة للعد، لنفترض إذا أن الأعداد الحقيقية قابلة للعد، إذا يمكن وضع لائحة مكونة من جميع الأعداد

الحقيقية:

1. 0,123456789...
2. 1,234567890...
3. 2,345678901...
4. ...

لنأخذ الآن الرقم الأول من العدد الأول من اللائحة، والرقم الثاني من العدد الثاني وهكذا، سنجد في الأخير أن العدد المحصل عليه يختلف عن العدد الأول كون الرقم الثاني لهما مختلف، ومختلف عن العدد الثاني من اللائحة كون الرقم الأول لهما مختلف وبالتالي العدد المحصل عليه مختلف عن جميع الأعداد الموجودة باللائحة، والتي افترضنا مسبقا أنها تضم جميع الأعداد الحقيقية، وبذلك نكون قد برهنا على أن الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد اللانهائي أي أن الأعداد اللاجذرية هي أيضا غير قابلة للعد اللانهائي.

إنه لمن الواضح أن مجموعة غير قابلة للعد اللانهائي هي "أكبر" من مجموعة قابلة للعد للانهائي، بحيث يمكن للمجموعة الأولى أن تشكل أعدادا متواصلة مثل النقط الموجودة بمستقيم عكس المجموعة الثانية فهي متقطعة.

حاول كانتور تعريف ومقارنة عدة مجموعات لانهائية مثل:

- إثبات أن مجموعة الأعداد الجبرية قابلة للعد اللانهائي، وهي حلول المعادلات الحدودية ذات المعاملات الصحيحة الطبيعية "Polynomial equations"
- إثبات أن مجموعة الأعداد المتسامة غير قابلة للعد اللانهائي "Transcendental numbers" وهي أعداد لاجذرية ليست حلولا لأية معادلات حدودية ذات معاملات صحيحة طبيعية.

لكنه واجه معارضة شديدة من قبل عدة رياضيين عندما نشر أول أفكاره في هذا الموضوع، لكننا الآن وبعد 150 سنة استطاع العالم أخيرا فهم أفكاره فأصبحت ركيزة أساسية في الرياضيات.

المراجع: [history.mcs] [plus.maths] [plus.maths]

[Gif]